ISSN 1330–0016
CODEN FIZBE7

POSSIBILITY OF DYNAMICAL MASS GENERATION IN FINITE QUANTUM ELECTRODYNAMICS

ALEXANDR M. EISHINSKII

National Mining University of Ukraine,
Dniepropetrovsk, 320000, Serova 3, apt. 7, Ukraine

Received 17 July 1998; Accepted 1 February 1999

Solution of nonlinear integral equation for the mass operator is constructed in the framework of the "finite" quantum electrodynamics of Johnson et al. with the vanishing bare mass. The study aims to solve the problem of possible existence of the massive solution of the equation, i.e. the problem of dynamical generation of mass. The main conclusion is that the dynamical mass generation does not take place in the "finite" quantum electrodynamics.

PACS numbers: 11.15.Tk, 11.30.Qc, 11.30.Rd UDC 530.145, 530.12

Keywords: "finite" quantum electrodynamics, dynamical mass generation, nonexistence of massive solution

1. Введение

Рассматривается решение нелинейного интегрального уравнения для массового оператора в рамках "конечной" электродинамики Джонсона и др. с нулевой затравочной массой. Целью исследования является решение вопроса о возможности существования массивного решения уравнения, т.е. динамического возникновения массы. Б работе [1] дано качественное решение проблемы, в данной заметке рассматривается аналитичское решение. Проблема впервые была сформулирована в рамках конечной электродинамики в работах [2] и [3].

2. Постановка задачи

Уравнение для фермионного пропагатора имеет вид [1]

$$S^{-1}(p) = S_0^{-1}(p) + \frac{e_0^2}{\mathrm{i}(2\pi)^4}\int \mathrm{d}^4q\,\gamma^\mu S(q)\Gamma^\nu(p,q,p-q)D^0_{\mu\nu}(p-q)\ , \tag{1}$$

где $S^{-1}(p)$ и $S_0^{-1}(p)$ полныи и свободныи пропагаторы фермиона, Γ^ν – полная вершинная функция, $D^0_{\mu\nu}$ – свободний фотонный пропагатор и e_0 – значение неперенормированного заряда.

$$S^{-1}(p) = m_0 + \Sigma(p) - \widetilde{p} - A(-p^2) - \widetilde{p}B(-p^2)\ , \tag{2}$$

$$S_0^{-1}(p) = m_0 - \widetilde{p}, \qquad D^0_{\mu\nu} = \frac{1}{k^2}\ \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}(1-d_i)\right),$$

где d_i определяют выбранную калибровку и $\widetilde{p} = p_\mu\gamma^\mu$. Как показано в работе [1], массовый оператор Σ удовлетворяет уравнению

$$\Sigma(p^2) = \frac{e_0^2}{\mathrm{i}(2\pi)^4}\int \mathrm{d}^4q\ \frac{\Sigma(q^2)}{(p-q)^2\,(\Sigma^2(q^2)+q^2)}\ . \tag{3}$$

Если $\Sigma(p^2)$ имеет особенности лишь на действитеьной положительной полуоси комплексной плоскости переменой p^2, то положение ближайщей к нулю особенности определит массу фермиона [1].

После перехода к евклидовой метрике и интегрирования по угловым переменным с помощью формул работы [4], получается интегральное уравнение

$$A(x) = g^2\left\{\frac{1}{x}\int_0^x \frac{yA(y)\,\mathrm{d}y}{A^2(y)+y} + \int_x^\infty \frac{A(y)\,\mathrm{d}y}{A^2(y)+y}\right\}, \tag{4}$$

где $y=-q^2$, $x=-p^2$, и $g^2 = 3\,l_0/(16\pi^2) = 3\alpha_0/4\pi$.

Как показано в работе [1], при любых предположениях относительно поведения $A(x)$ при $x\to 0$ справедливо соотношение

$$A(0) = g^2\int_0^\infty \frac{A(y)\,\mathrm{d}y}{A^2(y)+y}\ , \tag{5}$$

которое означает, что $A(0)$ конечно, если интеграл сходится. Интегральное уравнение (4) с использованием (5) может быть переписано в виде [1]:

$$A(x) = A(0) + g^2\int_0^\infty \frac{A(y)}{A^2(y)+y}\left(\frac{y}{x}-1\right)\mathrm{d}y. \tag{6}$$

Авторы показали [5], что при $A(0)=0,\ \ g^2>0$ уравнение (6) имеет лишь тривиальное решение. Рассмотрим прежде всего случай $A(0)\neq 0$. Тогда уравнение (6) дает следующее значение производной $\mathrm{d}A^2(x)/\mathrm{d}x$ в нуле [1]:

$$\frac{\mathrm{d}A^2(x)}{\mathrm{d}x}=-g^2, \qquad A(0)\neq 0\,. \tag{7}$$

Последовательным дифференцированием интегральное уравнение (6) в работе [1] сведено к дифференциальному уравнению

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}(xA(x))=-g^2\frac{A(x)}{A^2(x)+x}\,, \tag{8}$$

к исследованию которого применимы методы работ [7] и [9]. Таким образом, решение интегрального уравнения (4) свелось к нахождению решения дифференциального уравнения (8) с граничными условиями (7), имеющими при $x\to+\infty$ асимптотику, обеспечивающую сходимость интеграла в (5). Уравнение (8) изучалось также в работах [6] и [8].

3. Решение проблемы

Уравнение (8) можно записать в виде

$$\frac{x^2\mathrm{d}^2A(x)}{\mathrm{d}x^2}+\frac{2}{x}\frac{\mathrm{d}A(x)}{\mathrm{d}x}+\frac{3\alpha_0}{4\pi}\frac{A(x)}{x(A^2(x)+x)}=0\,. \tag{9}$$

Подстановка

$$A(x)=\sqrt{x}\ A_1(x) \tag{10}$$

преобразует дифференциальное уравнение (9) к виду

$$x^2\frac{\mathrm{d}^2A_1}{\mathrm{d}x^2}+3x\frac{\mathrm{d}A_1}{\mathrm{d}x}+\frac{3}{4}A_1+\frac{3\alpha_0}{4\pi}\frac{A_1}{A_1^2+1}=0\,. \tag{11}$$

Подстановка

$$x=\mathrm{e}^t \tag{12}$$

преобразует дифференциальное уравнение (11) к виду

$$\frac{\mathrm{d}^2A_1}{\mathrm{d}t^2}+2\frac{\mathrm{d}A_1}{\mathrm{d}t}+\frac{3}{4}A_1+\frac{3\alpha_0}{4\pi}\frac{A_1}{A_1^2+1}=0\,. \tag{13}$$

Уравнение (13) автономное, поэтому к нему применимы методы Пуанкаре-Ляпунова [10]. Запишем уравнение (13) в виде

$$\frac{\mathrm{d}^2A_1}{\mathrm{d}t^2}+2\frac{\mathrm{d}A_1}{\mathrm{d}t}+\frac{3}{4}A_1+\frac{3\alpha_0}{4\pi}A_1+\frac{3\alpha_0}{4\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^nA_1^{2n+1}=0\,. \tag{14}$$

При $x \to +\infty$ $(t \to +\infty)$ поведение решений уравнения (14) опредеяется значениями корней характеристического уравнения

$$k^2 + 2k + \frac{3}{4}\left(\frac{\alpha_0}{\pi} + 1\right) = 0, \qquad k_{1,2} = -1 \pm \frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{3\alpha_0}{\pi}}\,. \tag{15}$$

Решения:

1) Если $1 - (3\alpha_0/\pi) > 0$,

$$A_1 \sim c_1 x^{[-1 + (1/2)\sqrt{1 - 3\alpha_0/\pi}\ ]} + c_2 x^{[-1 - (1/2)\sqrt{1 - 3\alpha_0/\pi}\ ]}\,,$$

$$A(x) = c_1 x^{[(1/2)(-1 + \sqrt{1 - 3\alpha_0/\pi})]} + c_2 x^{[(1/2)(-1 - \sqrt{1 - 3\alpha_0/\pi})]} + o(1)\,.$$

Этот случай рассматривался в работе [6], но там допущена логическая ошибка, т.к. до опыта предполагалось что $A \ll x$.

2) Если $1 - (3\alpha_0/\pi) < 0$,

$$A_1 \sim \frac{c_1}{x}\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3\alpha_0}{\pi} - 1}\ \ln x\right) + \frac{c_2}{x}\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3\alpha_0}{\pi} - 1}\ \ln x\right),$$

$$A(x) = \frac{c_1}{\sqrt{x}}\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3\alpha_0}{\pi} - 1}\ \ln x\right) + \frac{c_2}{\sqrt{x}}\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3\alpha_0}{\pi} - 1}\ \ln x\right) + o(1)\,.$$

3) Если $1 - 3\alpha_0/\pi = 0$,

$$A_1 \sim \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x}\ln x, \qquad A(x) = \frac{c_1}{\sqrt{x}} + \frac{c_2}{\sqrt{x}}\ln x + o(1)\,.$$

Уравнение (13) может иметь такие решения, что

$$A_1(t) \to +\infty \qquad \text{при} \qquad t \to \infty. \tag{16}$$

С целью выявления решений (13) со свойством (16), сделаем подстановку

$$\frac{\mathrm{d}A_1}{\mathrm{d}t} = n\,, \tag{17}$$

которая преобразует дифференциальное уравнение (13) к виду

$$\frac{n\mathrm{d}n}{\mathrm{d}A_1} + 2n + \frac{3}{4}A_1 + \frac{3\alpha_0}{4\pi}\,\frac{A_1}{A_1^2 + 1} = 0\,. \tag{18}$$

К уравнению (18) может быть применена теорема Харди ([10], гл. 5): при $A_1(t) \to \infty$ положительные правильные решения уравнения (18) представляются в виде

$$n \sim \alpha A_1^k \, \mathrm{e}^{(\Pi \sqrt[q]{A_1})}, \qquad n \sim \alpha_1 A_1^e (\ln A_1)^m , \tag{19}$$

где α, α_1, k и e константы, Π – полином и q целое число.

Если при $A_1(t) \to +\infty$, $\Pi(\sqrt[q]{A_1}) \to -\infty$, то первый, второй и четвертый члены уравнения (18) стремится к нулю, третий же член стремятся к ∞, ни с чем не может скомпенсироваться. Следовательно, случай $\Pi(\sqrt[q]{A_1}) \to -\infty$ не может иметь места. Может случиться, что $\Pi(\sqrt[q]{A_1}) \to +\infty$, тогда $n > A_{1,\varepsilon>0}^{1+\varepsilon}$, чего не может быть на основании леммы 1 из работы [10] стр. 116. Следовательно, $\Pi(\sqrt[q]{A_1}) \equiv const$, $n \sim \widetilde{\alpha} A_1^k$, на основании указанной леммы из работы [10] для $k \leq 1$.

Рассмотрим случай $k < 1$, тогда из (18) получаем:

$$\frac{(\widetilde{\alpha}^k)^2}{(A_1)^{2(1-k)}} + 2\frac{\widetilde{\alpha}}{(A_1)^{1-k}} + \frac{3}{4} + \frac{3\alpha_0}{4\pi} \, \frac{1}{A_1^2+1} = 0 \ ;$$

член $3/4$ ни с чем не может $(A_1 \to +\infty)$ скомпенсироваться. Следовательно, $n \sim \widetilde{\alpha} A_1$. Подставляя это значение n в уравнение (18), получаем

$$\widetilde{\alpha}^2 A_1 + 2\widetilde{\alpha} A_1 + (3/4) A_1 \approx 0, \quad \widetilde{\alpha}_1 = -(1/2), \quad \widetilde{\alpha}_2 = -(3/2) .$$

Следовательно, положительных решений со свойством (16) уравнение (13) в этом случае не имеет.

Рассмотрим теперь вторую формулу (19). В этом случае уравнение (13) записывается в виде

$$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}A_1} = -2 - \frac{3}{4} A_1 - \frac{3\alpha_0}{4\pi} \, \frac{1}{A_1^2+1} .$$

Можно показать, что все возможности ведут к выводу о том, что $m = 0, e \leq 1$, и таким образом, свести задачу к уже разобранному случаю. Можно сделать вывод, что уравнение (18) не имеет решений со свойством (16).

Изучим теперь решение уравнения (11) при $x \to +0$. Подстановка

$$x = \mathrm{e}^{-t} \tag{21}$$

преобразует уравнение (11) к виду

$$\frac{\mathrm{d}^2 A_1}{\mathrm{d}t^2} - 2\frac{\mathrm{d}A_1}{\mathrm{d}t} + \frac{3}{4} A_1 + \frac{3\alpha_0}{4\pi} \frac{A_1}{A_1^2+1} = 0 . \tag{22}$$

Характеристическое уравнение, соответствующее линейной части уравнения (22), имеет вид

$$k^2-2k+\frac{3}{4}\left(\frac{\alpha_0}{\pi}+1\right)=0, \qquad k_{1,2}=1\pm\frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{3\alpha_0}{\pi}}.$$

Решения:

1) Если $1-(3\alpha_0/\pi)>0$,

$$A(x)=c_1x^{[(1/2)(-1+\sqrt{1-3\alpha_0/\pi}\ ]}+c_2x^{[(1/2)(-1-\sqrt{1-3\alpha_0/\pi}\ ]}+o(1).$$

Т.е., при $t\to+\infty(x\to+0)$, $A(x)\to+\infty$, что несовместимо с конечностью $A(0)$.

2) Если $1-(3\alpha_0/\pi)<0$,

$$A(x)=+\frac{c_1}{\sqrt{x}}\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3\alpha_0}{\pi}-1}\ \ln x\right)+\frac{c_2}{\sqrt{x}}\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3\alpha_0}{\pi}-1}\ \ln x\right)+o(1),$$

$\lim_{x\to+0}A(x)=+\infty$, что противоречит конечности $A(0)$.

3) Если $3\alpha_0/\pi=1$,

$$A(x)=\frac{c_1}{\sqrt{x}}+\frac{c_2}{\sqrt{x}}\ln x+o(1),$$

что противоречит конечности $A(0)$.

Уравнение (22) при $t\to\infty$ может допускать решение типа (16). Заметим, что если существуют положительные решения уравнения (22) со свойством (16), то они монотонны. Предположим противное, т.е., что существует такая последовательность

$$\{t_n\}\to+\infty, \quad \text{что} \quad \frac{\mathrm{d}A_1}{\mathrm{d}t}\{t_n\}=0,$$

$$\frac{\mathrm{d}^2A_1}{\mathrm{d}t^2}\{t_n\}+\frac{3}{4}A_1\{t_n\}+\frac{3\alpha_0}{4\pi}\frac{A_1\{t_n\}}{A_1^2\{t_n\}+1}=0,$$

$$\frac{A_1\{t_n\}}{A_1^2\{t_n\}+1}\to 0, \qquad \frac{\mathrm{d}^2A_1}{\mathrm{d}t^2}\{t_n\}=-\frac{3}{4}A_1\{t_n\}<0,$$

т.е. выбранное положительное немонотонное решение во всех точках $\{t_n\}$ достигает максимумов, а между двумя последовательными максимумами, для правильного решения должен быть хоть один минимум. Полученое противоречие доказывает монотонность положительных решений уравнения (22). Найдем теперь эти решения с помощью теоремы Харди [10], как описано ранее. Во всех случаях получается противоречие с конечностью $A(0)$ (при переходе к $A(x)$). Покажем, что при $x \to +\infty$ в уравнении (9), $A(x)$ не может стремиться к постоянной $c > 0$. Предположим противное, т.е., что $A(x) \to c > 0$. В этом случае

$$\frac{\mathrm{d}^2 A}{\mathrm{d}x^2} + \frac{2}{x}\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}x} + \frac{3\alpha}{4\pi}\,\frac{c}{x(c^2+x)} = 0\,.$$

С помощью сведения последнего уравнения к линейному, окончательно получаем

$$A(x) = -\frac{c_1}{x} - \frac{3\alpha_0 c}{4\pi}\,\ln x - \frac{3\alpha_0 c^3}{4\pi x}\,\ln(c^2+x) + \frac{3\alpha_0 c}{4\pi}\,\ln\left(\frac{x}{c^2+x}\right),$$

где c_1 произвольная постоянная интегрирования, т.е. $A(x)$ при $x \to +\infty$ стремится к $-\infty$, что противоречит предположению о том, что $A(x) \to c > 0$. Следовательно, $c = 0, c_1 = 0$. Итак, в работе [8] $m_1 = 0$, а в работе [6] формулы (4) и (5) ошибочны.

4. *Выводы*

Задача динамического возниковения массы в рамках “конечной” электродинамики Джонсона-Бейкера-Уилли решения не имеет.

References

1) A. I. Alekseyev, B. A. Arbuzov and A. Ya. Rodionov, T. M. Phys **42** (1980) 291;
2) K. Johnson, M. Baker and R. Wiley, Phys. Rev. B **136** (1964) 1111;
3) M. Baker and K. Johnson, Phys. Rev. D **8** (1973) 1111;
4) B. A. Arbuzov and A. T. Filipov, Nuovo Cimento **38** (1965) 796;
5) B. G. Dragovic, D. P. Mavlo and A. T. Filipov, Preprint P2-10344, Dubna (1976);
6) M. Sh. Pevzner, Ukr. Phyz. Journ. **8** (1965) 910;
7) A. M. Eishinskii, Vestnik MGU **4** (1969) 26;
8) A. J. Maris, V. E. Hescovitz and G. Jacob, Phys. Rev. Lett. **12** (1964) 313;
9) A. M. Eishinskii, Mat. Vestnik (U) **6** (21) 3 (1969) 295:
10) R. Bellman, *Stability Theory of Differential Equations*, Mir, Moscow (1953).

MOGUĆNOST DINAMIČKE TVORBE MASE U KONAČNOJ KVANTNOJ ELEKTRODINAMICI

Izvodi se rješenje nelinarne integralne jednadžbe za operator mase u okviru “konačne” kvantne elektrodinamike Johnsona i sur., s iščezavajućom golom masom. Pokušava se riješiti problem mogućeg postojanja rješenja s konačnom masom, t.j., problem dinamičke tvorbe mase. Glavni je zaključak da se dinamička tvorba mase ne dešava u “konačnoj” kvantnoj elektrodinamici.